Topologia
Lista 1

Zad 1. Czy funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(x, y) = |x| + |y|$ jest metryką na $\mathbb{R}$?

Zad 2. Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Czy funkcje dane wzorami

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

$$\sigma\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_X(x_1, x_2) \cdot d_Y(y_1, y_2)$$

są metrykami na zbiorze $X \times Y$?

Zad 3. Wykazać, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to funkcja

$$\widehat{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

również jest metryką na X.

W przestrzeni metrycznej (X, d) *kulą otwartą*, *kulą domkniętą* i odpowiednio *sferą* o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$, nazywamy następujące zbiory

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$\widetilde{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Zad 4. Pokazać, że w dowolnej przestrzeni metrycznej kula otwarta jest podzbiorem otwartym, a kula domknięta jest podzbiorem domkniętym.

Zad 5. Naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ kule otwarte $B\big((0, 0), 1\big)$ dla następujących metryk:

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad (\textit{metryka euklidesowa}),$$

$$d_t(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad (\textit{metryka taksówkowa}),$$

$$d_m(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \qquad (\textit{metryka maximum}),$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Pokazać, że metryki te wprowadzają na $\mathbb{R}^2$ tą samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad 6. Wykazać, że jeżeli d jest metryką na X, to funkcja

$$\widehat{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \qquad x, y \in X,$$

jest metryką na X wyznaczającą te same zbiory otwarte co metryka d.

Zad 7. Pokazać, że dowolny zbiór X wraz z funkcją określoną wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = y, \\ 1, & \text{gdy} \quad x \neq y, \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną. Metrykę d nazywa się *metryka dyskretną* lub *zero-jedynkową*. Wyznaczyć postać kul otwartych, kul domkniętych oraz sfer w przestrzeni (X, d).

Zad 8. Pokazać, że nie w każdej przestrzeni metrycznej

a) kula domknięta $\widetilde{B}(x_0, r)$ równa jest domknięciu $\overline{B(x_0, r)}$ kuli otwartej $B(x_0, r)$,

b) wnętrze $\operatorname{int} \widetilde{B}(x_0, r)$ kuli domkniętej $\widetilde{B}(x_0, r)$ pokrywa się z kulą otwartą $B(x_0, r)$,

c) brzeg $\operatorname{bd} B(x_0, r)$ kuli otwartej $B(x_0, r)$ jest sferą $S(x_0, r)$.

Zad 9. Niech d_1 będzie metryką euklidesową, a d_2 metryką dyskretną na prostej $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja

$$d\big((x,y)(u,v)\big) = d_1(x,u) + d_2(y,v)$$

jest metryką na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz wyznaczyć postać kul w tej metryce.

Zad 10. Rozważmy podzbiór $X = L \cup \{O\} \cup P$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, gdzie

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \quad O = (0,0), \quad P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Niech d będzie metryką euklidesową na $\mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja

$$\widehat{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{gdy } x, y \in L \text{ lub } x, y \in P \\ d(x,O) + d(O,y), & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

jest metryką na X. Dlaczego metrykę tą można by nazwać *metryką mostu*?

Zad 11. Wyznaczyć wnętrze $\operatorname{int} A$, domknięcie $\overline{A}$ oraz brzeg $\operatorname{bd} A$ podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ przestrzeni $(\mathbb{R}, d)$, gdzie d jest metryka euklidesową, gdy

$$a)\ A = \mathbb{N}, \qquad b)\ A = \mathbb{Z}, \qquad c)\ A = \mathbb{Q},$$

$$d)\ A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad e)\ A = \mathbb{R}.$$

Zad 12. Pokazać, że dla wolnych podzbiorów A, B przestrzeni metrycznej X zachodzą inkluzje

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int} (A \cup B)$$

Czy zachodzą inkluzje odwrotne?

Zad 13. Wykazać, że dla dowolnego podzbioru A przestrzeni metrycznej X zachodzi równość $\operatorname{int} (X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$.